



ASCEE

www.ascee.nl  
info@ascee.nl  
+31 6 189 71 622

# NAG Masterclass: Nonlinear acoustics

Dr.ir. Anne de Jong

Nov. 26<sup>th</sup>, 2020

# Inhoud

- Kwantificeren van niet-lineariteit
- Modelleren van niet-lineaire akoestiek
  - Afleiding Kuznetsov's vergelijking
  - Presentatie Westerveltvergelijking
  - Voorbeeld
- Tijdsgemiddelde effecten
  - Voorbeelden
- Einde



ASCEE

[www.ascee.nl](http://www.ascee.nl)  
[info@ascee.nl](mailto:info@ascee.nl)  
+31 6 189 71 622

## Kwantificeren van niet-lineariteit

acoustics | software | consultancy | engineering | education

# Wanneer zijn niet-lineaire effecten belangrijk?

- At high amplitudes: acoustic velocities  $\sim c_0$ , Mach number  $\sim 1$
- At (weakly damped) resonance frequencies:
  - Above certain critical amplitude
  - Dependent on resonance quality factor
- Measure of nonlinear effects: Total Harmonic Distortion
  - Ratio of rms acoustic pressure in higher harmonics to rms acoustic pressure in fundamental / driving frequency component
- Other measures



# Niet-lineaire / hoge amplitude effecten

- De propagatie van een drukgolf door een medium heeft een snelheid van  $c+u$ . De geluidssnelheid  $c$  is afhankelijk van de druk:
  - Bij  $p = p_0$ :  $c_0 = 344$  m/s
  - Bij  $p = p_0 + 100$  Pa:  $344,05$  m/s
$$\frac{c}{c_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$
- De snelheid van de golf heeft tevens een convectieve component:  $c + \underline{u}$ . De piek heeft een positieve snelheid, en het dal een negatieve snelheid.
- → De piek van de golf reist (een beetje) sneller dan het dan het dal.

# De grootte van een golf

- De akoestische golfvergelijking  $\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla \cdot \nabla p$  is afgeleid door: nemen dat
  - Verliesloos, adiabatische compressie en expansie aan te nemen in de behoudswetten van de stromingsleer.
  - Kleine verstoringen:  $p \ll p_0 \simeq 10^5 \text{ Pa}$
- Hoe klein is klein?
  - Bij 100 dB SPL:  $p_{\text{rms}} = 2 \text{ Pa} \ll 10^5 \text{ Pa}$
  - Bij 140 dB SPL:  $p_{\text{rms}} = 200 \text{ Pa} \ll$
  - Bij 194 dB SPL:  $p_{\text{rms}} = p_0$  (fysisch onmogelijk)



ASCEE

[www.ascee.nl](http://www.ascee.nl)  
[info@ascee.nl](mailto:info@ascee.nl)  
+31 6 189 71 622

Het modelleren van niet-lineaire akoestiek

- Kuznetsov's vergelijking



# Modelleren, alles of niets?

- Transiënte aero-akoestische interactie in een chemisch reagerende stroming met hoge geometrische verplaatsingen en ook hoge drukverstoringen en ook nog turbulentie :( :(
  - Gebruik al je computerpaardekrachten voor een volledige Directe Numerieke Simulatie. Je hebt dan veel tijd om koffie te drinken.
- Hoe reduceer je rekentijd?
  - Reductie van geometrische dimensionaliteit (2D, axisymmetrisch, 1D)
  - Neem aan: kleine verstoringen (relatief klein t.o.v. ...)
  - Neem aan: niet reagerende stromingen
  - Neem aan: kleine geometrische verplaatsingen
  - Neem aan: een in rust zijnd medium, dat verstoord wordt door ...
  - Neem aan: geen viskeuze wrijving
  - Neem aan: adiabatisch
- Als je rekentijd wilt sparen, zul je je hersenen moeten gebruiken



# Startpunt: behoudswetten van de stromingsleer

- Behoud van:

- Massa
- Impuls
- Energie

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}) = 0$$


$$\frac{\partial \hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}} \otimes \hat{\mathbf{u}}) = -\nabla \hat{p} + \nabla \cdot \hat{\underline{\underline{\tau}}}$$

$$\frac{\partial \hat{\rho} \hat{E}}{\partial t} + \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}} H) = \nabla \cdot (\hat{\kappa}(\hat{T}) \nabla \hat{T}) + \nabla \cdot (\hat{\underline{\underline{\tau}}} \cdot \hat{\mathbf{u}})$$

- Thermische gaswet:

where  $\hat{\rho}$  is the density,  $t$  is time,  $\hat{\mathbf{u}}$  the velocity,  $\nabla$  the gradient operator,  $\otimes$  the dyadic, or tensor product,  $\hat{p}$  the pressure,  $\hat{\underline{\underline{\tau}}}$  the viscous stress tensor, defined as

$$\hat{\underline{\underline{\tau}}} = \mu(\hat{T}) \left( \nabla \otimes \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \otimes \hat{\mathbf{u}})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{I} \right) + \left( \zeta(\hat{T}) (\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{I} \right)$$



$$d\hat{\rho} = \frac{\gamma}{c^2} d\hat{p} - \hat{\rho} \alpha_P d\hat{T}$$



ASCEE

[www.ascee.nl](http://www.ascee.nl)  
[info@ascee.nl](mailto:info@ascee.nl)  
+31 6 189 71 622

# Niet-lineaire propagatie, afleiding Kuznetsov's vergelijking

# Vereenvoudiging van de behoudswetten

- Voor lucht, en kleine temperatuurvariaties, de stroming mag aangenomen worden als zijnde rotatievrij:  $\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$

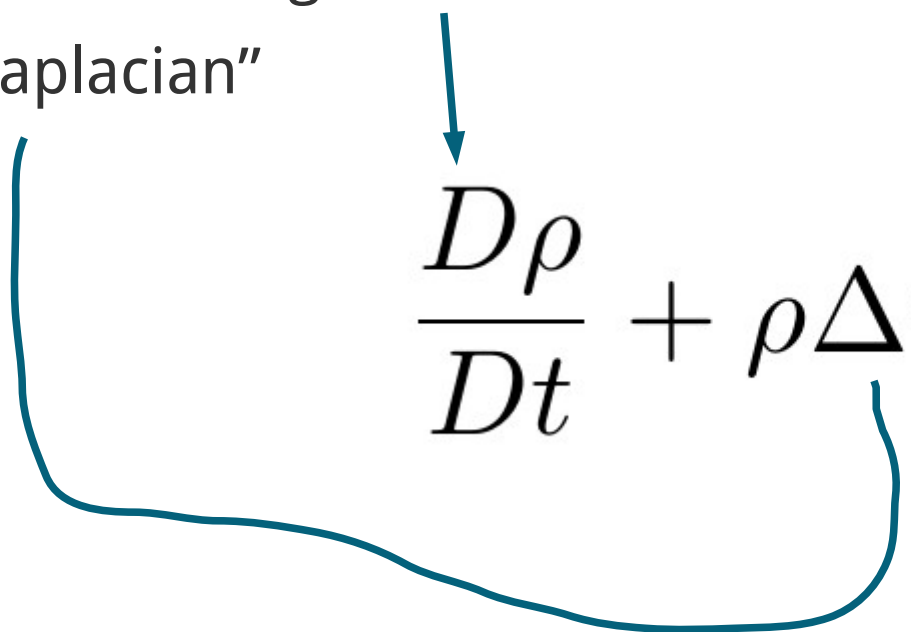
- Substitutie in de impuls-vergelijking, en een aantal manipulaties levert:

$$\nabla \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] = \frac{1}{\rho} \left[ -\nabla p + \left( \frac{4}{3} \mu_0 + \zeta_0 \right) \nabla (\nabla^2 \Phi) \right]$$

- Op het rode na, is dit al bijna een 1-variable PDE!

# Rotatievrije stroming, massabehoud

- Materiële afgeleide
- “Laplacian”


$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\Delta\Phi = 0$$

## Vereenvoudiging van de behoudswetten (2)

- We nemen aan dat de stroming quasi-isentropisch is, wat zoveel betekent dat entropievariatiën van een kleine orde grootte hebben. Hiervoor lineariseren we de gegeneraliseerde warmtevergelijking, uitgeschreven in de grootte entropie ( $s$ ):

$$\hat{\rho} \hat{T} \frac{D\hat{s}}{Dt} = \hat{\rho} \hat{\Phi} + \nabla \cdot (\hat{\kappa} \nabla \hat{T})$$

- Gelineariseerd:  $\rho_0 T_0 \frac{\partial s}{\partial t} = \kappa_0 \Delta T$



## Elimineren van de druk uit de versimpelde impulsvergelijking

- Neem aan: ideaal gas, kleine entropieverstoringen:

$$dh = T_0 ds + \frac{1}{\rho} dp,$$

$$dh = c_p dT$$

$$\nabla h = T_0 \nabla s + \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

Vul in in momentum:

$$\nabla \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] = \left[ \nabla h - T_0 \nabla s + \frac{1}{\rho} \left( \frac{4}{3} \mu_0 + \zeta_0 \right) \nabla (\nabla^2 \Phi) \right]$$

Integreer over plaats:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{\rho} \left( \frac{4}{3} \mu_0 + \zeta_0 \right) (\nabla^2 \Phi) + \underbrace{h - T_0 s}_{\text{integration constant}} =$$

## Massabehoud – naar enthalpievergelijking

- Tot op 2e orde in variaties, kan de massabehoudsvergelijking worden herschreven naar een vergelijking voor de enthalpie. Hiervoor dient eerst de thermodynamische relatie voor de enthalpie herschreven worden.

$$dh = T_0 ds + \frac{1}{\rho} dp$$

- Vul in in massabehoud:  $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \Delta \Phi = 0$

- Resulteert in:  $\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\gamma \kappa_0}{\rho_0 c_p} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi + (\gamma - 1) \left( c_p T_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Delta \Phi = 0$

## Combineer massabehoud met impulsbehoud

- Neem tijdsafgeleide van impulsbehoud:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \frac{1}{\rho} \left( \frac{4}{3} \mu_0 + \zeta_0 \right) (\Delta \Phi) + h - T_0 s = \underbrace{h_0 - T_0 s_0}_{\text{integration constant}}$$

- Vul in massabehoud:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\gamma \kappa_0}{\rho_0 c_p} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \Phi + (\gamma - 1) \left( c_p T_0 - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \Delta \Phi = 0$$

- Resulteert in.....



# Kuznetsov's vergelijking (1971)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \Phi = \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla \Phi)^2 + \frac{\gamma - 1}{2c_0^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{b}{\rho_0} \Delta \Phi \right]$$

$$c_0 = \gamma R T_0$$

- Waarin l.h.s: golfvergelijking homogeen deel

- R.h.s. gekoppelde brontermen,

$$b = \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) + \frac{4}{3} \mu + \zeta$$

- Niet-lineaire effecten in de vorm van de tijdsafgeleide in het kwadraat
- Niet-lineaire effecten in de vorm van de plaatsafgeleide in het kwadraat
- Dissipatie

# Van Kuznetsov naar Westervelt

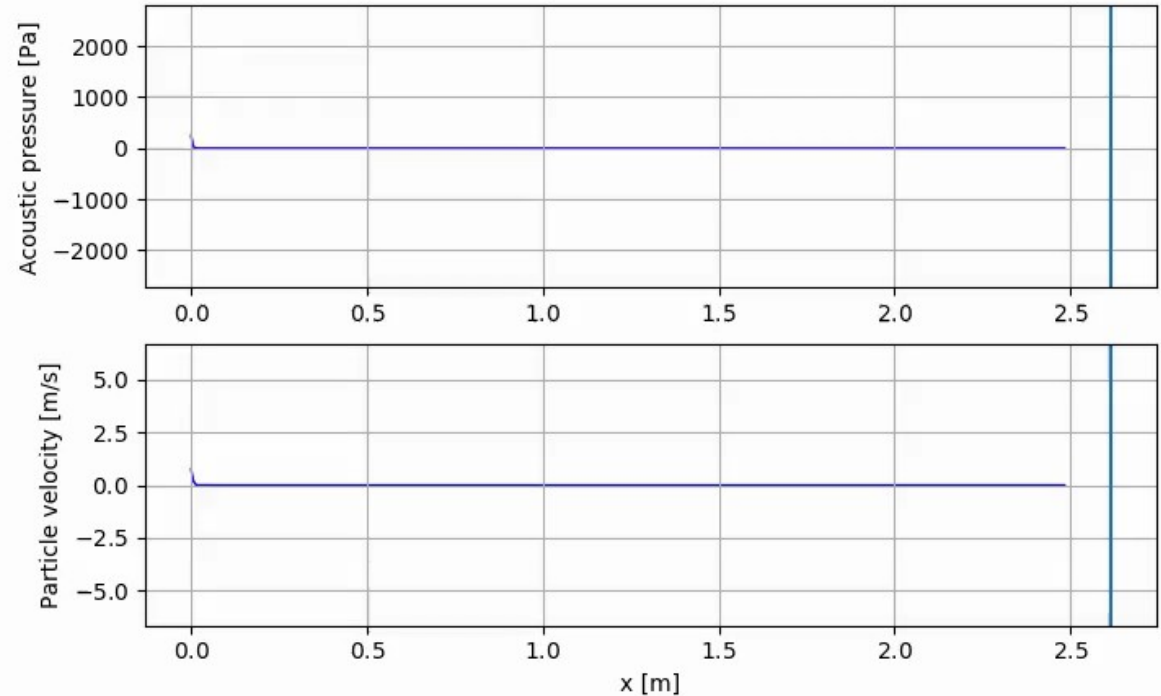
- Kuznetsov: vergelijking voor de snelheidspotentiaal. Nauwkeurig tot op 2e orde in entropievariaties.
- Westervelt: vergelijking voor de akoestische druk. Nauwkeurig tot op 2e orde in drukvariaties:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{b}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{\gamma - 1}{2\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [p^2]$$

- Westervelt vergelijking is makkelijker te implementeren, en bijvoorbeeld geïmplementeerd in COMSOL (v.a. versie 5.4)

# Voorbeeld Westervelt vergelijkingen (1D)

- Hogere harmonischen generatie
- Golf-verstijling
- Schokgolf (bij blauwe lijn)
- Dissipatie
- Old-age





ASCEE

[www.ascee.nl](http://www.ascee.nl)  
[info@ascee.nl](mailto:info@ascee.nl)  
+31 6 189 71 622

Tijdsgemiddelde effecten

acoustics | software | consultancy | engineering | education

# Tijdsgemiddelde effecten (D.C.)

- Het kwadraat van een oscillerende term resulteert in een tijdsgemiddelde offset.

$$\sin(\omega t)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{tijdsgemiddeld effect}} - \underbrace{\frac{1}{2} \cos(2\omega t)}_{\text{hogere harmonische}}$$

- Wanneer het tijdsgemiddelde effect een verwaarloosbare koppeling heeft met het akoestische veld, dan kan met behulp van perturbatie-expansies een oplossing gevonden worden voor het probleem.

# Voorbeelden

- Thermo-akoestiek: tijdsgemiddelde verplaatsing van warmte door oscillerende drukgolven





# Voorbeelden

- Akoestische streaming
  - Netto stroming aangedreven door een staande golf

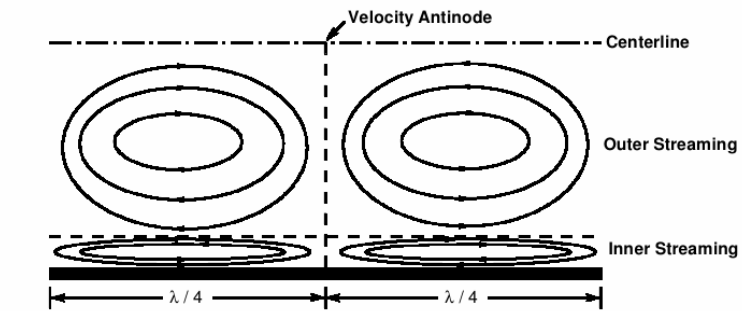


Figure 1. Schematic diagram of inner and outer streaming cells. Not to scale.

As with any stress system, it is spatial variation of the Reynolds stress that can cause a net force per unit volume,  $F_j$ , to act on the fluid. This force can be written

$$F_j = -\partial(\overline{\rho u_i u_j})/\partial x_i, \quad (18)$$

This force  $F_j$  per unit volume is capable of generating a steady streaming motion. In fact, the equation for the Eulerian mean motion  $\bar{u}_j$  generated by this force is

$$\rho_0(\bar{u}_i \partial \bar{u}_j / \partial x_i) = F_j - \partial \bar{p} / \partial x_j + \mu \nabla^2 \bar{u}_j. \quad (19)$$

- Lighthill: Acoustic streaming (1978)

# Voorbeelden

- Akoestische radiatiedruk (levitatie):
  - Tijdsgemiddelde drukverschillen veroorzaakt door hoge amplitude geluidsgolven
  - <https://www.youtube.com/watch?v=7dVA7zaIAkU>

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta \langle \mathbf{v}^{(2)} \rangle + (\xi_0 + \eta_0/3) \nabla (\nabla \cdot \langle \mathbf{v}^{(2)} \rangle) - \nabla \langle p^{(2)} \rangle \\ = \rho_0 \langle \mathbf{v}^{(1)} (\nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)}) + (\mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{v}^{(1)} \rangle, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{v}^{(2)} \rangle = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \langle \rho^{(1)} \mathbf{v}^{(1)} \rangle, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \kappa_0 \Delta \langle T^{(2)} \rangle = & \left\langle (\rho_0 T^{(1)} + T_0 \rho^{(1)}) \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} \right\rangle \\ & + \rho_0 T_0 \langle \mathbf{v}^{(1)} \cdot \nabla s^{(1)} \rangle - (\xi_0 - 2\eta_0/3) \\ & \times \left\langle (\nabla \cdot \mathbf{v}^{(1)})^2 - \frac{\eta_0}{2} \left\langle \left( \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k^{(1)}}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle \right\rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

## Acoustic radiation force on a spherical particle in a viscous heat-conducting fluid. I. General formula

Alexander A. Doinikov

*Institute of Nuclear Problems, Bobruiskaya 11, 220050 Minsk, Byelorussia*

## Theory of acoustic radiation pressure for actual fluids

Alexander A. Doinikov

*Institute of Nuclear Problems, Bobruiskaya 11, 220050 Minsk, Byelorussia*

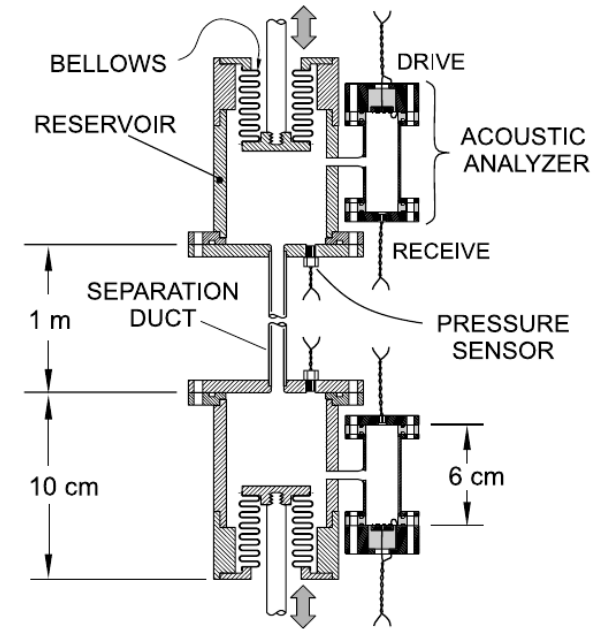
(Received 13 March 1996)





# Voorbeelden

- Gasmengselseparatie



## Thermoacoustic Separation of a He-Ar Mixture

P. S. Spoor and G. W. Swift

*Condensed Matter and Thermal Physics Group, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, New Mexico 87545*

(Received 3 May 2000)



ASCEE

www.ascee.nl  
info@ascee.nl  
+31 6 189 71 622

The end / discussion

